

Teoria e Normativa

Propagazione in direzione verticale di un'onda di taglio in un modello stratigrafico monodimensionale.

Un'onda di taglio di frequenza angolare ω che si propaga verso l'alto causa spostamenti orizzontali nel terreno $u(z,t)$ che devono soddisfare l'equazione differenziale:

$$(1) \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \eta \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial t}$$

dove ρ è la densità di massa del terreno (peso di volume diviso l'accelerazione di gravità g), G il modulo dinamico di taglio e η la viscosità del mezzo.

Lo spostamento u , indotto dalla sollecitazione armonica di frequenza ω , può anche essere espresso nella forma:

$$(2) u(z,t) = U(z)e^{i\omega t}$$

Sostituendo la (2) nella (1) si ottiene:

$$(3) (G + i\omega\eta) \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \rho\omega^2 U$$

L'equazione (3) ha la seguente soluzione generale :

$$(4) U(z) = Ee^{ikz} + Fe^{-ikz}$$

in cui:

$$k = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{G^*}}$$

PROGRAM GEO –FAD1d ver.1.9 per Windows

G^* è il modulo di taglio complesso dato dalla relazione:

$$G^* = G(1 + 2i\beta)$$

e β è il fattore di smorzamento critico del terreno, così definito:

$$\beta = \frac{\omega\eta}{2G}$$

Nella relazione (4) E rappresenta l'ampiezza dell'onda incidente, cioè diretta verso l'alto, e F l'ampiezza dell'onda riflessa dall'interfaccia dello strato, e quindi diretta verso il basso.

Combinando la (2) e la (4) si ricava:

$$(5) u(z, t) = (Ee^{ikz} + Fe^{-ikz})e^{i\omega t}$$

In un terreno composto da più strati, al tetto dello strato n-esimo di spessore h si ha:

$$(6) u_n(z = 0) = (E_n + F_n)e^{i\omega t}$$

mentre alla base:

$$(7) u_n(z = h) = (E_n e^{ik_n h_n} + F_n e^{-ik_n h_n})e^{i\omega t}$$

Lo sforzo di taglio agente sul piano orizzontale all'interfaccia dello strato è dato dalla relazione:

$$\tau(z, t) = G^* \frac{\partial u}{\partial t}$$

Quindi in corrispondenza della faccia superiore dello strato n-esimo si ha:

$$(8) \tau_n(z = 0) = ik_n G_n^* (E_n + F_n)e^{i\omega t}$$

e in quella inferiore:

$$(9) \tau_n(z=h) = ik_n G_n^* (E_n e^{ik_n h_n} + F_n e^{-ik_n h_n}) e^{i\alpha t}$$

La deformazione tangenziale ($\gamma(z,t) = \frac{\partial u}{\partial t}$) è invece ricavabile come segue:

$$\begin{aligned} \gamma_n(z=0) &= ik_n (E_n + F_n) e^{i\alpha t} \\ \gamma_n(z=h) &= ik_n (E_n e^{ik_n h_n} + F_n e^{-ik_n h_n}) e^{i\alpha t} \end{aligned}$$

In un terreno multistrato, in generale, i parametri ρ , G e β variano da strato a strato. Di conseguenza anche i valori di E e F tendono ad assumere valori differenti. Le ampiezze E e F dell'onda incidente e riflessa all'interfaccia dello strato $n+1$ rispetto allo strato n , posto ad una quota superiore, si possono ricavare dalle relazioni:

$$(10) E_{n+1} = \frac{1}{2} E_n (1 + \alpha_n) e^{ik_n h_n} + \frac{1}{2} F_n (1 - \alpha_n) e^{-ik_n h_n}$$

$$(11) F_{n+1} = \frac{1}{2} E_n (1 - \alpha_n) e^{ik_n h_n} + \frac{1}{2} F_n (1 + \alpha_n) e^{-ik_n h_n}$$

in cui:

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{\rho_n G_n^*}{\rho_{n+1} G_{n+1}^*}}$$

è il rapporto d'impedenza complesso fra gli strati n e $n+1$.

In superficie lo sforzo di taglio deve essere uguale a zero. Dalla relazione (8) si ricava quindi che al piano campagna $E_1=F_1$.

Ponendo per semplicità $E_1=F_1=1$ è possibile, utilizzando le relazioni (10) e (11) calcolare i valori di E e F per tutti gli strati di copertura, partendo dalla superficie fino al bedrock.

PROGRAM GEO -FAD1d ver.1.9 per Windows

La funzione di trasferimento fra gli spostamenti dello strato n e lo strato $n+1$, più profondo, è definita come segue:

$$(12) A_{n+1,n}(\omega) = \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{E_n + F_n}{E_{n+1} + F_{n+1}}$$

In corrispondenza dell'interfaccia superiore del bedrock $E'=F'$ (sforzo di taglio nullo). Di conseguenza la relazione che fornisce la funzione di trasferimento dell'onda di taglio in superficie rispetto al substrato roccioso (fattore di amplificazione dinamica) è data dalla relazione:

$$(13) A_{bedrock,1}(\omega) = \frac{1}{E_{bedrock}}$$

Stima del moto sismico in superficie.

La procedura di calcolo vista nel paragrafo precedente si riferisce al caso di una singola onda di taglio di frequenza angolare ω . In linea di massima il fattore di amplificazione varia in funzione di ω , come si deduce dalla relazione (3).

Un accelerogramma si compone di una sequenza di valori di accelerazione a , registrati o simulati numericamente, all'interno di un intervallo di tempo T . I valori di a sono campionati con un passo costante Δt , detto intervallo di campionamento, di solito compreso fra 0,01 e 0,02 secondi. La durata dell'evento sismico è dato quindi da:

$$(14) T(s) = n\Delta t$$

dove n è il numero complessivo degli intervalli di campionamento.

Un impulso sismico, memorizzato in forma di accelerogramma, può essere visto come la somma finita di una serie di onde taglio con differenti frequenze angolari ω e quindi può essere espresso sottoforma di trasformata discreta di Fourier.

PROGRAM GEO -FAD1d ver.1.9 per Windows

$$(15) a(t) = \sum_{j=0}^{j=n/2} (a_j e^{i\omega_j t} + b_j e^{-i\omega_j t})$$

in cui $n/2$ sono le frequenze angolari equidistanti date da:

$$\omega_j = \frac{2\pi}{n\Delta t} j$$

I parametri a e b , funzioni di ω , prendono il nome di coefficienti complessi e sono forniti dalle relazioni:

$$(16) a_j = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} a(t) e^{-i\omega_j t}$$

$$(17) b_j = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} a(t) e^{i\omega_j t}$$

I valori di a e b si ricavano, applicando l'algoritmo della trasformata veloce di Fourier (FFT) alla (15).

Poiché sia a che b sono numeri complessi, solitamente il loro andamento in funzione della frequenza viene rappresentato graficamente come spettro delle ampiezze di Fourier, ponendo, in ascissa, gli $n/2$ valori di ω e in ordinata i corrispondenti valori di ampiezza, dati da:

$$(18) |F(\omega)|_j = \sqrt{a_j^2 + b_j^2}$$

Applicando agli $n/2$ valori di ω il calcolo del fattore di amplificazione illustrato nel paragrafo precedente, è possibile costruire graficamente l'andamento della funzione di trasferimento, espressa dalla (13), in funzione della frequenza (grafico della funzione di trasferimento).

Se la (15) rappresenta l'accelerogramma registrato al bedrock, quello in superficie avrà la seguente forma:

PROGRAM GEO -FAD1d ver.1.9 per Windows

$$(19) a_{\text{superficie}}(t) = \sum_{j=0}^{j=n/2} A_{\text{bedrock},1}(\omega_j) (a_j e^{i\omega_j t} + b_j e^{-i\omega_j t})$$

In pratica, quindi, i valori di a e b calcolati per il bedrock con l'algoritmo FFT devono essere moltiplicati per i fattori di amplificazione corrispondenti alla stessa frequenza ω , per ricavare i parametri a e b della trasformata discreta di Fourier dell'accelerogramma di superficie. I valori di $a_{\text{superficie}}$ per la durata T dell'evento sismico si ottengono quindi, applicando l'algoritmo della trasformata veloce inversa di Fourier (IFFT) alla (19).

Determinazione dei parametri geotecnici dinamici del terreno.

Nell'equazione differenziale (1) compaiono alcuni parametri caratteristici del terreno. Oltre al peso di volume, di semplice determinazione, la risoluzione della (1) richiede la conoscenza, per ogni strato, delle grandezze G , modulo dinamico di taglio, e η , viscosità del mezzo. Quest'ultimo viene sostituito solitamente dal parametro $\beta = \frac{\omega\eta}{2G}$, fattore di smorzamento dello strato.

G e β dipendono dalla deformazione tangenziale (γ) che subisce il terreno al passaggio di un'onda di taglio di frequenza data. In particolare G assume un valore massimo (G_0) per valori bassi o nulli di γ . Al crescere di γ il valore di G tende a diminuire secondo una tipica curva di decadimento. Al contrario β in corrispondenza di ridotti valori di γ assume il suo valore minimo (β_0) e cresce quindi all'aumentare di γ secondo una tipica curva d'incremento fino al raggiungimento del suo valore massimo (β_{max}). Sia G_0 che β_{max} , e le relative curve di decadimento e incremento, possono essere dedotte direttamente attraverso specifiche prove di laboratorio (colonna risonante). In alternativa possono essere stimati, seppur in maniera approssimata, sfruttando le diverse correlazioni empiriche disponibili in letteratura.

Stima del modulo dinamico di taglio per basse deformazioni da correlazioni empiriche.

Il modulo dinamico di taglio per basse deformazioni (G_0) può essere ricavato direttamente, correlandolo con la velocità delle onde S dello strato:

$$G_0 = \rho V_s^2$$

dove ρ è la densità del terreno data dal peso di volume diviso per l'accelerazione di gravità ($9,81 \text{ m/s}^2$).

In alternativa può essere dedotto attraverso correlazioni empiriche con i risultati di prove penetrometriche dinamiche o statiche.

Vengono di seguito illustrati alcuni metodi di uso comune.

Imai e Tomauchi

Il metodo, valido per tutti i tipi di terreno, si basa sulla seguente relazione:

$$G_0 (\text{kg} / \text{cmq}) = 28Rp^{0.611}$$

dove R_p è la resistenza di punta media nello strato.

Ohsaki & Iwasaki

Il metodo di Ohsaki & Iwasaki, valido per le sabbie pulite o con fine plastico (limo o argilla), si basa sulla seguente relazione:

$$G_0 (t / \text{mq}) = aNspt^b$$

dove N_{spt} è il numero di colpi medio nello strato mentre a e b sono costanti dipendenti dalla granulometria del deposito secondo il seguente schema:

a	b	Granulometria
650	0.94	Sabbie pulite

PROGRAM GEO –FAD1d ver.1.9 per Windows

1182	0.76	Sabbie con fine plastico
------	------	--------------------------

Crespellani e Vannucchi

Il metodo di Crespellani e Vannucchi, valido per le sabbie in generale, si basa sulla seguente relazione:

$$G_0(t / mq) = 794 N_{spt}^{0,611}$$

Ohsaki & Iwasaki

Il metodo si basa sulla seguente relazione:

$$G_0(t / mq) = a N_{spt}^b$$

con a = 1400 e b = 0.78.

Il metodo è valido per i terreni coesivi in genere (dai limi plastici alle argille). Vista la non trascurabile dispersione dei dati, il metodo va applicato con prudenza e solo per stime di primo riferimento.

Stima del fattore di smorzamento massimo e iniziale da correlazioni empiriche.

Hardin e Drnevich (1972) hanno proposto le seguenti correlazioni empiriche per la stima del fattore di smorzamento massimo:

$$\beta_{\max} = 33 - \text{Log}_{10} N \text{ (sabbie asciutte)}$$

$$\beta_{\max} = 28 - \text{Log}_{10} N \text{ (sabbie sature)}$$

$$\beta_{\max} = 31 - (3 + 0,03 f) \sqrt{\sigma_0} + 1,5 \sqrt{f} - 1,5 \text{Log}_{10} N \text{ (terreni coesivi)}$$

dove:

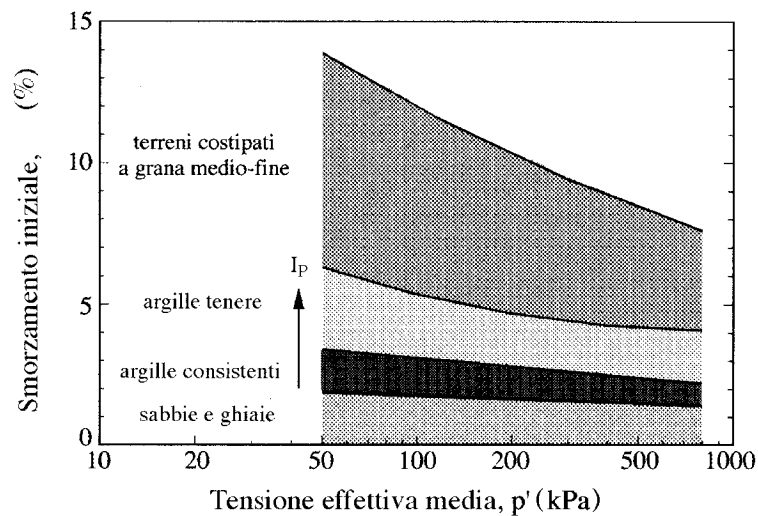
f (Hz) = frequenza dell'onda di taglio;

σ_0 (kg/cmq) = pressione efficace a metà strato;

PROGRAM GEO -FAD1d ver.1.9 per Windows

N = numero di cicli di carico del sisma, ricavabile dalla relazione empirica: $\text{Log}_{10}N=0,31M-1,14$; con M= magnitudo del sisma.

Per la stima del fattore di smorzamento iniziale si può invece fare riferimento al seguente grafico (Vinale et al., 1996).



Stima delle curve $G(\gamma)$ e $\beta(\gamma)$ da correlazioni empiriche.

Nella scelta dei parametri G e β da inserire nel calcolo del fattore di amplificazione va tenuto presente il loro comportamento non lineare al variare della deformazione tangenziale indotta dal sisma. Solo in presenza di sollecitazioni sismiche di bassa intensità, con valori di PGA (accelerazione di picco) indicativamente inferiori a 0,1 g, è appropriato l'uso esclusivo dei parametri G_0 e β_0 (modello lineare). Per terremoti di intensità maggiore la non linearità di G e β non può essere trascurata.

Nasce quindi il problema della determinazione delle curve $G(\gamma)$ e $\beta(\gamma)$ per i singoli strati costituenti il modello di terreno in esame. Nella pratica vengono spesso utilizzate le curve proposte da Hardin e Drnevich (1972). Le

PROGRAM GEO -FAD1d ver.1.9 per Windows

curve di decadimento di G e quella d'incremento di β secondo gli Autori possono essere approssimate dalle relazioni:

$$G(\gamma) = \frac{G_0}{1 + \gamma_h}$$

$$\beta(\gamma) = \frac{\beta_{\max} \gamma_h}{1 + \gamma_h}$$

Il parametro γ_h delle curve è ricavabile dalla formula:

$$\gamma_h = \frac{\gamma}{\gamma_r} \left(1 + A e^{-\frac{B\gamma}{\gamma_r}} \right)$$

dove γ_r è dato da τ_{\max}/G_0 e A e B sono grandezze ottenibili dalla seguente tabella:

Litologia	A	B
Sabbia asciutta	-0,5	0,16
Sabbia satura	-0,21Log ₁₀ N	0,16
Terreni coesivi	1+0,25Log ₁₀ N	1,30

in cui N è il numero di cicli di carico indotti dal sisma.

La grandezza τ_{\max} , che rappresenta lo sforzo di taglio massimo dinamico mobilitabile dal terreno, può essere ottenuto dalla seguente correlazione empirica:

$$\tau_{\max} (MPa) = F \left\{ \left[\frac{1+k_0}{2} \sigma_0 \sin \varphi + c \cos \varphi \right]^2 - \left[\frac{1-k_0}{2} \sigma_0 \right]^2 \right\}^{1/2}$$

dove:

F = fattore correttivo funzione della litologia e del grado di saturazione:

PROGRAM GEO –FAD1d ver.1.9 per Windows

F=1,10-1,15 (sabbie asciutte)
 F=1,5-1,3 (terreni coesivi saturi)
 F=1,5-2,0 (terreni coesivi parzialmente saturi).

C (Mpa) = coesione drenata del terreno.
 φ (°) = angolo di resistenza al taglio del terreno.
 K_0 = coefficiente di spinta a riposo del terreno.
 σ_0 (Mpa) =pressione verticale efficace media.

In alternativa alle curve di Hardin e Drnevich è possibile utilizzare quelle suggerite da Seed e Idriss (1970,1990) e da Rollins et al. (1998).

Argille (Seed e Idriss)

γ (%)	G/G ₀	β (%)
0,0001	1	0,24
0,0003	1	0,42
0,001	1	0,8
0,003	0,981	1,4
0,01	0,941	2,8
0,03	0,847	5,1
0,1	0,656	9,8
0,3	0,438	15,5
1	0,238	21
3	0,144	25
10	0,11	28

Sabbie (Seed e Idriss)

γ (%)	G/G _{max}	β (%)
0,0001	1	0,24
0,0003	1	0,42
0,001	0,99	0,8
0,003	0,96	1,4
0,01	0,85	2,8
0,03	0,64	5,1
0,1	0,37	9,8
0,3	0,18	15,5
1	0,08	21
3	0,05	25

PROGRAM GEO –FAD1d ver.1.9 per Windows

	10	0,035	28
<i>Substrato roccioso(Seed e Idriss)</i>			
γ (%)	G/G_{max}		β (%)
0,0001	1		0,4
0,0003	1		0,8
0,001	0,9875		1,5
0,003	0,9525		3
0,01	0,9		4,6
0,03	0,81		
0,1	0,725		
1	0,55		
<i>Ghiaie con ciottoli-ghiaie con sabbia (Rollins)</i>			
γ (%)	G/G_{max}		β (%)
0,0001	1		1
0,0003	1		1
0,001	0,96		1,5
0,003	0,88		2,1
0,01	0,75		4
0,03	0,55		7
0,1	0,33		11
0,3	0,19		14
1	0,05		17
<i>Argille con ghiaia-argille limose (Rollins)</i>			
γ (%)	G/G_{max}		β (%)
0,0001	1		2
0,0003	1		2
0,001	0,97		2,1
0,003	0,95		2,2
0,01	0,88		3
0,03	0,70		4,5
0,1	0,37		10
0,3	0,15		17
1	0,05		25

Stima dell'amplificazione con il modello lineare equivalente.

La procedura di calcolo illustrata nel paragrafo 3.1 è applicabile anche nel caso in cui il comportamento del terreno non sia lineare. La procedura da seguire è quella indicata di seguito.

1. Si stima la risposta sismica di ogni singolo strato, introducendo inizialmente i valori G_0 e β_0 , validi per basse deformazioni.
2. Si calcola la deformazione tangenziale indotta dal sisma e si aggiornano i valori di G e β sulla base delle curve $G(\gamma)$ e $\beta(\gamma)$ ricavate in precedenza.
3. Si ripetono i passi 1 e 2 fino a quando le differenze nei valori della deformazione tangenziale calcolati in due iterazioni successive diventa inferiore ad un valore di tolleranza prestabilito.

Calcolo dello spettro di risposta elastico.

Nell'analisi sismica delle strutture si utilizza spesso come riferimento il moto di un oscillatore elastico ad un grado di libertà. Tale oscillatore, posto sul terreno in condizioni iniziali di quiete [$y(0)=0$] e sollecitato successivamente dal sisma di progetto, subirà uno spostamento y nel tempo che potrà essere descritto dalla seguente relazione:

$$y(t) = -\frac{1}{\omega_d} \int_0^t a(\tau) e^{-\zeta \omega_n (t-\tau)} \text{sen}[\omega_d (t-\tau)] d\tau$$

in cui l'integrale al secondo membro prende il nome di integrale di Duhamel e dove:

- ζ = fattore di smorzamento dell'oscillatore, normalmente minore di 0,1 (10 %) e di solito posto uguale a 0,05 (5%);
- ω_n = periodo di oscillazione naturale, dato da $2\pi/T$;
- ω_d = periodo di oscillazione smorzata, dato da $\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$.

Per l'elaborazione dello spettro di risposta elastico si procede come indicato di seguito.

1. Si sceglie il fattore di smorzamento dell'oscillatore e si fissa un intervallo di periodi di oscillazione T di riferimento (per esempio 0-4 secondi, valido per la maggior parte delle costruzioni).
2. Per ogni valore di T si calcolano i valori di ω_n e ω_d corrispondenti.
3. Per un dato istante t , con t che varia solitamente da 0 (inizio della registrazione dell'accelerogramma) a t_{sisma} (termine della registrazione), si risolve l'integrale di Duhamel; l'integrale va risolto numericamente, per esempio con il metodo di Simpson, suddividendo l'intervallo $(0, t_{\text{sisma}})$ in n sottointervalli Δt , dove Δt è il passo di registrazione dell'accelerogramma; in questo modo lo spostamento al tempo t [$y(t)$] può essere visto semplicemente come la somma algebrica di tutti gli spostamenti indotti nell'oscillatore dagli impulsi sismici $a(\tau)$ che si sono susseguiti nell'intervallo di tempo $(\tau=0, \tau=t)$.

PROGRAM GEO –FAD1d ver.1.9 per Windows

4. La risoluzione numerica dell'integrale fornisce n spostamenti y ; per ogni valore di T si prende il valore massimo (y_{\max}). Diagrammando i valori di y_{\max} in funzione di T si ottiene lo spettro di risposta elastico degli spostamenti relativo all'accelerogramma di riferimento.
5. Dallo spettro di risposta degli spostamenti si può passare rapidamente, anche se a costo di una certa approssimazione, comunque accettabile, a quello delle velocità e delle accelerazioni (PSV e PSA), moltiplicando semplicemente le ordinate del grafico rispettivamente per ω_n e ω_n^2 .

Va notato che il legame accelerogramma-spettro di risposta non è biunivoco. Da un determinato accelerogramma si può ricavare un unico spettro di risposta. Il contrario non è vero, in quanto accelerogrammi di durata diversa possono fornire spettri di risposta elastici molto simili.

Lo spettro di risposta elastico delle accelerazioni costituisce quindi uno strumento di rapida consultazione per ricavare le sollecitazioni subite da una struttura con periodo di oscillazione naturale $T > 0$ (per $T = 0$ lo spettro fornisce l'accelerazione del terreno).

Gli spettri di risposta generati partendo da un accelerogramma hanno solitamente un aspetto irregolare. E' ammissibile una regolarizzazione della forma, per semplificarne l'utilizzo, applicando comuni tecniche di smussamento (media mobile, media mobile esponenziale, ecc.).

Per generare uno spettro elastico semplificato, adattato al D.M. 14.01.2008 si possono prendere come riferimento le coordinate del massimo assoluto dello spettro generato (T_{\max} , PSA_{\max}), usando, per la creazione dello spettro semplificato, i seguenti parametri:

$S_s = FAD$;

$S_t = 1$;

$T_c = T_{\max}$;

$F_0 = PSA_{\max} / (a_{g\text{bedrock}} \times S_s \times S_t \times n)$;

dove n è un fattore legato allo smorzamento, secondo le indicazioni del D.M.14.01.2008.

Per calcolare i fattori di amplificazione spettrale rispetto al bedrock, sia delle accelerazioni (F_a) che delle velocità (F_v), bisogna eseguire un confronto fra gli spettri elastici generati relativamente al bedrock e alla superficie.

I passaggi di calcolo per stimare F_a sono i seguenti:

PROGRAM GEO –FAD1d ver.1.9 per Windows

1. si stima il valore del periodo T in corrispondenza del quale lo spettro delle accelerazioni al bedrock presenta il suo valore massimo (T_{max});
2. si calcola il valore medio delle ordinate dello spettro nell'intorno di T_{max} con la seguente relazione:

$$A_{medio} = \frac{1}{T_{max}} \int_{0,5T_{max}}^{1,5T_{max}} A(T) dT$$

3. si ripetono i passi 1 e 2 per lo spettro di risposta delle accelerazioni in superficie;
4. si calcola F_a facendo il rapporto fra A_{medio} in superficie e al bedrock:

$$F_a = \frac{A_{medio\ superficie}}{A_{mediobedrock}}$$

I passaggi di calcolo per stimare F_v invece sono i seguenti:

5. si stima il valore del periodo T in corrispondenza del quale lo spettro delle velocità al bedrock presenta il suo valore massimo (T_{max});
6. si calcola il valore medio delle ordinate dello spettro nell'intorno di T_{max} con la seguente relazione:

$$V_{medio} = \frac{1}{T_{max}} \int_{0,8T_{max}}^{1,2T_{max}} V(T) dT$$

7. si ripetono i passi 1 e 2 per lo spettro di risposta delle accelerazioni in superficie;
8. si calcola F_v facendo il rapporto fra V_{medio} in superficie e al bedrock:

$$F_v = \frac{V_{medio\ superficie}}{V_{mediobedrock}}$$